Math.en.Jeans, 5e congrès 1994, p. 207-214

Pascal et Fermat. La naissance du calcul des probabilités.

par Claude Dellacherie

[NDLR : texte écrit d'après l'enregistrement sonore de la conférence donnée au Palais de la découverte ; voici ce qu'en dit l'auteur (extraits) :

« A priori je n'aime pas du tout être enregistré, ayant la conviction intime depuis longtemps que le parlé et l'écrit sont deux arts différents. Ce que j'ai reçu m'a renforcé dans cette conviction, mais m'a aussi prouvé qu'une transcription intelligente pouvait véhiculer un charme que je serais incapable de créer à l'écrit. Cependant, peut-être cela n'est perceptible qu'au lecteur ayant assisté au congrès.
(…)
Pour rien au monde je ne demanderai de toucher à vos "extraits savoureux". Deux lignes cependant pour me justifier : je ne sais pas travailler avec des transparents, et mon jeu de jambes est incompatible avec le souci du port d'un micro.
(…) »

Claude Dellacherie fait encore quelques remarques au sujet de sa conférence, sur le fond ; nous renvoyons le lecteur à la fin du texte, car il nous semble qu'il vaut mieux lire le texte d'abord.]

La naissance du calcul de probabilités avec Pascal et Fermat vers 1654 … à ce moment-là, on peut dire que Pascal et Fermat étaient ***les*** deux grands mathématiciens, au moins en Europe. Descartes était déjà mort. Les autres étaient peut-être déjà nés, mais ils ne produisaient pas encore beaucoup de maths.

Et avec Pascal et Fermat, je citerai encore Roberval, qui est aussi un bon mathématicien français. C'était d'ailleurs le seul que je connaissais quand j'avais 40 ans de moins, parce que c'est lui qui était à l'origine des balances Roberval.

voilà le problème

Le problème a été posé par le Chevalier de Méré. Le Chevalier de Méré, était un "bel esprit", il aimait bien les mathématiques, il aimait beaucoup jouer : jouer aux dés, jouer aux cartes. Et le Chevalier de Méré a posé à Pascal le problème suivant :

On suppose qu'il y a deux joueurs, que je vais appeler A, B. A et B jouent au jeu de *pile* ou *face*, suivant certaines règles :

D'abord, on joue avec une pièce non biaisée : il y a autant de chances de faire *pile* que *face*, à chaque fois.

Ensuite, l'un des joueurs, A, choisit de jouer les *pile*, et B de jouer les *face*. Je vais expliquer après ce que veulent dire "jouer les *pile*" et "jouer les *face*", mais ils décident de mettre en jeu un "pot", que celui qui va gagner ramassera. Il y a donc une certaine somme, S, à gagner. Chacun a misé, et on va supposer les mises égales.

Celui qui gagne, c'est le premier qui aura vu apparaître 5 fois le côté qu'il a choisi :

• A gagne s'il apparaît 5 fois *pile* quand on jette la pièce avant qu'il ne soit apparu 5 fois *face*,

• par contre c'est B qui gagne si 5 *face* apparaissent avant que *pile* ne soit apparu 5 fois.

Qui jette la pièce ? Ça n'a aucune importance, mais il ne faut pas qu'ils trichent. Chaque fois qu'on jette la pièce, on regarde, et on note : la première fois c'est *pile*, la seconde fois c'est *face*, puis *face*, et encore *face*, puis *pile*, et *pile*, etc : *PFFFPP*… Le premier dont le côté sort 5 fois ramasse l'argent. C'est une règle très simple et on voit bien qu'il n'y a rien à discuter.

le problème

Supposez seulement que les joueurs n'aient le droit de jouer — comme ici — que pendant 20 minutes : au bout de 20 minutes, il y a quelqu'un qui coupe ! [NDLR : au Palais, les conférenciers, adultes et élèves, ne devaient pas dépasser 20 mn]

Il faut qu'ils décident comment se partager la somme *S*. Il y a des cas où c'est simple : s'ils arrêtent au moment où on a déjà vu 4 fois *pile* et 4 fois *face*, peut-être pas dans l'ordre *PPPPFFFF*, mais s'il y a eu par exemple *PPFFFFPP*, il suffirait de jouer encore un coup pour savoir qui gagne. Normalement, il y a une chance sur deux pour que ça soit *A* qui gagne, une chance sur deux pour que ça soit *B*, et par conséquent ils ne vont pas se disputer, et ils vont diviser la somme par 2.

Par contre, si on arrête alors qu'il y a eu deux *pile* et trois *face*, ça devient plus compliqué, plus difficile à calculer. Et s'il y a quatre *F* contre deux *P* au moment où on s'arrête, *B* doit certainement remporter une grande partie du pot (il n'a plus qu'à faire une fois *F* pour gagner, tandis que *A* doit faire encore trois fois *P*), mais quelle part précisément ?

C'est ce problème-là que le Chevalier de Méré a posé à Pascal. Et Pascal a trouvé une solution, qu'il a essayé d'expliquer aux autres, en particulier à Roberval. Les gens étaient sceptiques, ils n'étaient pas trop contents de cette solution. Ensuite, Fermat a trouvé une seconde solution. Sa solution est tout à fait différente de celle de Pascal en ce qui concerne le raisonnement, mais elle donne exactement le même résultat.

Evidemment, les deux hommes se sont trouvés confortés parce que chacun d'eux se savait être un bon mathématicien, plus que bon même, et chacun d'eux avait trouvé les mêmes résultats en raisonnant de manières différentes.

Il faut bien comprendre que le problème n'est pas si simple. Au départ, ce n'est même pas vraiment un problème de mathématiques. On pourrait très bien dire : quand ils ne peuvent pas finir, on les fait se battre ensemble, et c'est le plus fort qui ramasse le tout. On a quand même l'idée intuitive que si ils ont déjà fait autant chacun, ils doivent diviser la somme en deux (ce que je viens de dire pour *PPPPFFFF*, ça peut être aussi bien pour *PPPFFF*). Mais bien sûr, c'est dans les cas où les partages sont inégaux que le problème se pose vraiment.

potentiel et probabilités

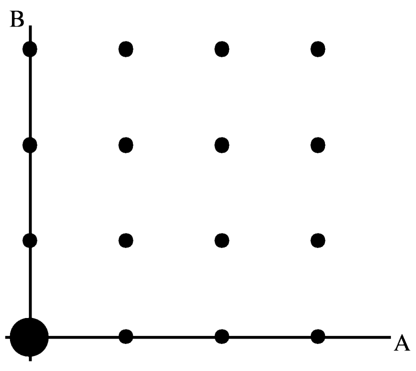
Ainsi Pascal a une solution, dont je pourrais dire (en termes modernes) que c'était une solution de théorie du potentiel. Et on pourrait dire que Fermat a donné une solution venant de la théorie des probabilités. Mais que ce soit en théorie du potentiel ou en théorie des probabilités, c'est le premier calcul qui existe, qui ne soit pas évident, d'un problème de probabilités. Avant Pascal et Fermat, on avait déjà fait : on jette deux dés, quelle est la probabilité pour amener une paire, ou pour amener un double six, ou pour amener … Tout ça a été fait, bien sûr, mais ici c'est vraiment plus difficile.

Théorie du potentiel, théorie des probabilités, on peut dire qu'au XX° siècle, et même pendant la deuxième moitié du XX° siècle, on est arrivé à une unité entre ces deux théories anciennes. La théorie du potentiel est née du potentiel newtonien, au XVIII° siècle, et s'est beaucoup développée au XIX° siècle.

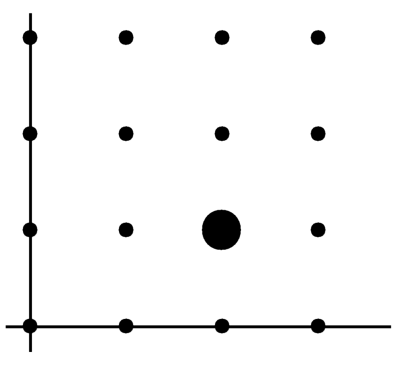
La théorie des probabilités, elle, a commencé avec Pascal et Fermat, s'est développée aussi au XIX° siècle, et s'est surtout extrêmement développée au XX°.

la solution de Pascal

Je vais maintenant vous expliquer quelle est la solution de Pascal. Je vais le faire en supposant, pour gagner du temps et de la place, que c'est gagné quand il y a un joueur qui a 3 *pile* ou 3 *face* (au lieu de 5). Je mets les *pile* (ou *A* c'est pareil) en abscisses, et les *face* ou *B* en ordonnéees.



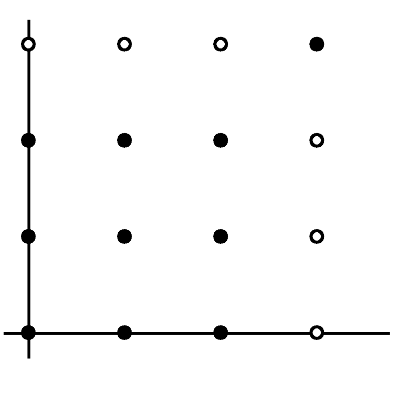
Les voilà au départ : ils n'ont rien ; et à la fin, *A* a déjà 2 *P* (il lui en manque 1) tandis que *B* n'a fait que 1 *F* (il lui en manque 2).

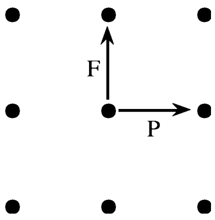


Cette situation peut être représenté par le point de coordonnées (2, 1).

Chaque point représente une position du jeu et je remarque des positions finales : quand on y arrive, on sait que c'est *A* qui a gagné, ou que c'est *B*.

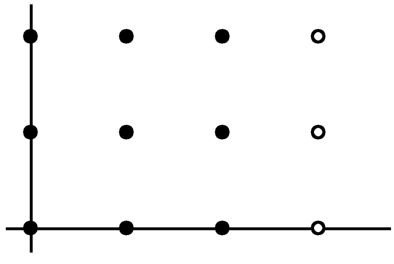
Vous pouvez remarquer qu'on ne peut pas atteindre (3, 3) puisqu'on s'arrête au premier qui a gagné.





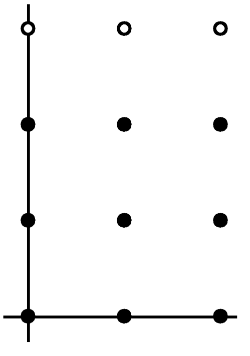
Sur ce dessin, on a une espèce de jeu : on est en un point et si *pile* sort, on va vers la droite, si c'est *face* on va vers le haut.

on compte ce que gagne A

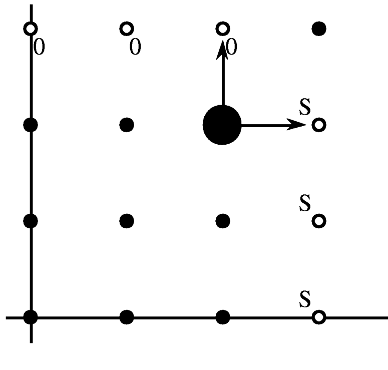


S'il arrive là, il gagne *S* …

… tandis qu'ici, il gagne 0.

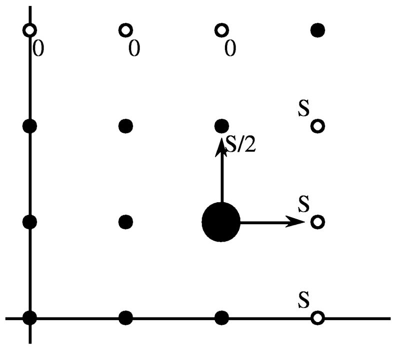


Maintenant voyons un point intermédiaire comme celui-ci :



C'est le cas simple que j'avais donné, il y a une chance sur deux d'aller à droite et une chance sur deux d'aller en haut, et *A* gagne donc *S*/2.

Remarquez que *S*/2 c'est exactement un demi de 0 plus un demi de *S* : c'est la demi-somme de 0 et de *S* parce qu'il y a une chance sur deux d'aller gagner 0, et une chance sur deux d'aller gagner *S*. C'est tout à fait naturel, c''est ce qu'a pensé Pascal. Maintenant avec cette règle je n'ai plus aucune difficulté.



Je dis c'est un demi de *S* si il va à droite, plus un demi de *S*/2 si il va en haut, et donc il va gagner trois quarts de *S*.

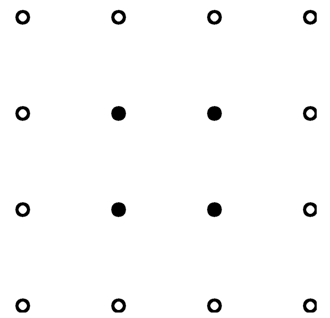
Voilà donc la méthode de Pascal. En termes modernes, on a un domaine avec une frontière, et on cherche une fonction (la somme qui revient à *A*) : on connaît les valeurs de la fonction à la frontière, et on veut déterminer la valeur de cette fonction à l'intérieur du domaine, à l'aide d'une formule qui relie un point à ses voisins. Vous voyez que petit à petit je peux compléter tout le tableau.

D'autre part je pourrais remplir une bonne partie du tableau à l'aide de considérations de symétries. Je n'ai qu'une moitié à combler, et je complète par symétrie [pour deux points symétriques (a, b) et (b, a) le total des valeurs est *S*].

(digression :)

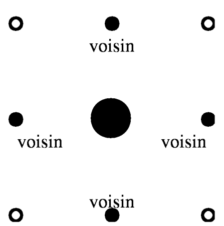
opérateurs de moyennes

Ce problème, abordé par Pascal, est un problème tout à fait d'actualité, mais avec des "opérateurs de moyennes" qui sont plus compliqués que celui qui est ici. J'en donne un exemple, qui n'a pas de rapport évident avec le jeu de *pile* ou *face* :



Dans ce nouveau jeu, le domaine c'est tout le carré, la fonction à déterminer est donnée sur la frontière du domaine qui est le bord.

J'ai une fonction dont je connais les valeurs sur la frontière et une règle pour la moyenne :



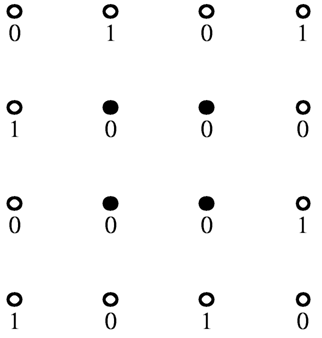
c'est la même sauf que cette fois-ci, les voisins vont être quatre. On va donc demander à notre fonction que la valeur qu'elle prend en un point soit le quart de la somme des valeurs qu'elle prend pour les quatre voisins. Et puis d'autre part qu'elle vaille telle, telle, telle valeurs sur le bord.

C'est devenu beaucoup moins simple que dans le jeu précédent. Dès le départ je ne sais calculer en aucun point : ce qui va se passer à un endroit a de l'influence sur ce qui va se passer à un autre endroit, et réciproquement. Dans le jeu précédent, il y avait une espèce de fuite en avant : comme j'avais une direction privilégiée, je pouvais aller en arrière, et trouver de nouveaux points. Alors qu'ici ce n'est pas le cas, je ne peux même pas démarrer : il n'y a pas un seul endroit où je connaisse déjà tous les voisins.

la méthode de relaxation

Il y a plusieurs manières de faire. Une première manière, c'est d'écrire les équations qui correspondent, et de résoudre. Mais il y a une autre manière, amusante et intéressante : vous prenez des valeurs sur le bord par exemple : 1, 0, 1, 0, … voilà des valeurs à la frontière.

Mais vous ne savez pas quelles sont les valeurs à l'intérieur. Alors, vous décider de prendre *n'importe quelle* valeur aux endroits que vous ne connaissez pas [il y en a quatre ici, mais on peut le faire avec des dessins beaucoup plus grands] : vous prenez n'importe quelle valeur, par exemple 0, ça vous est permis.



Maintenant que vous avez des valeurs partout, vous pouvez calculer partout la moyenne sur les quatre voisins. Evidemment partout ça sera faux, presque partout, ***presque*** sûrement, la valeur que vous avez mise ***ne sera pas*** égale à la moyenne des quatre voisins. Mais vous ***changez*** cette valeur en la remplaçant par la moyenne des quatre voisins. Et vous le faites, un certain nombre de fois. Chaque fois vous faites les calculs des nouveaux à l'aide des anciens. C'est un procédé itératif, comme dans le cas des IFS, qui converge vers un point fixe. Ce point fixe, ***c'est*** la valeur que vous cherchez ; et ça converge très, très vite.

(fin de la digression)

Quelle est la solution de Fermat ?

En Terminale, on apprend que la probabilité pour que quelque chose ait lieu, c'est

« nombre de cas favorables sur
nombre de cas possibles ».

Evidemment ce n'est bon que si les cas possibles se produisent tous avec la même probabilité.

Pour notre problème, *pile* ou *face* apparaissent avec la même probabilité. Et on a déjà deux *pile* et un *face* donc, par la suite :
• soit on joue *pile*, et c'est *A* qui gagne,
• soit on joue *face* et *pile*, c'est encore *A* qui gagne,
• soit on joue *face* et *face* et c'est *B* qui gagne.

le compte est bon ?

Or si vous comptez grossièrement en disant :

il y a trois cas possibles, il y en a deux dans lesquels c'est A qui gagne,

vous allez obtenir 2/3 alors que vous savez que nous avons obtenu 3/4 et 3/4 ce n'est pas 2/3 : on a spolié *A* de ses victoires, puisque faire *face pile* c'est la moitié de faire *face*, et faire *face face* c'est la moitié de faire *face*.

Donc le compte n'est pas bon.

Bien sûr je vous le propose dans le cas trois — deux mais si je le faisais dans des cas vingt-sept — trente-douze, tout de suite ça serait beaucoup plus compliqué.

une idée presque courante

Quelle a été l'idée de Fermat ? Une idée géniale, très simple, presque courante en mathématiques : il a ajouté quelque chose, un élément. Comme dans un problème de géométrie : on sèche, on sèche … et puis tout d'un coup, on pense à tracer un segment, et hop ! la démonstration se dessine.

on fait comme si

Fermat a dit : je vais faire *comme si* ils avaient été obligés de jouer 5 fois. Je les fais jouer 5 fois. On avait dit qu'ils avaient commencé par PPF, 2 et 1, je pouvais ajouter PP ou PF ou FP ou FF ; et effectivement, les probabilités de chacune de ces possibilités

(PPF)PP	*(PPF)PF*
(PPF)FP	*(PPF)FF*

sont les mêmes. On n'a même pas besoin de savoir combien ça fait, on voit que c'est la même longueur, c'est la même chance de tirer *pile* ou *face*. P gagne dans trois cas sur quatre [ce qu'avait trouvé Pascal] : *PPFPP*, *PPFPF*, *PPFFP*. Les mêmes choses arrivent avec d'autres nombres que deux et trois.

Monsieur Roberval n'a pas été content du tout de cette solution parce qu'on ajoutait des trucs qui n'existaient pas, parce que bien sûr les joueurs ne jouaient ***jamais*** le *PF* : dès qu'on arrive à *PPF**P***, on arrête le jeu, et on n'a jamais *PPF**PF***.

Mais les mathématiques, c'est aussi l'art d'ajouter des éléments imaginaires pour pouvoir résoudre facilement les problèmes.

(réponse à une question :)
compléments sur la théorie du potentiel

La théorie du potentiel classique c'est l'étude de $\Delta u = f$ où Δ est ce qu'on appelle le laplacien. Pour deux dimensions, on a une fonction u à deux variables x et y et cela s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

en tout point x, y.

En théorie du potentiel, f, à un coefficient multiplicatif près, représente la charge d'électricité qu'il y a dans l'espace [l'espace ici c'est le plan] et u est le potentiel créé par cette charge ; le lien entre la charge et le potentiel qu'elle crée, c'est cette équation [mais si vous ne comprenez pas ce n'est pas grave, vous avez encore le temps].

Mais que prend-on comme approximation de la théorie du potentiel quand on fait un calcul numérique ? On ne sait pas faire le calcul, alors on calcule sur des petits carrés ou des petits rectangles (un maillage).

Un des problèmes bien connus, c'est le problème de Dirichlet : on se donne un domaine, une fonction sur le bord, je l'appelle g, et une fonction à l'intérieur, f, et on veut chercher une fonction u telle que

$$\Delta u = f \text{ à l'intérieur}$$

et que

$$u = g \text{ sur le bord.}$$

discrétiser c'est trouver une approximation discrète où on peut faire les calculs du laplacien : on découpe tout en petits rectangles et on remplace le calcul de Δu en ce point par la moyenne des quatre voisins : u du premier voisin plus u du deuxième voisin plus u du troisième voisin plus u du quatrième voisin, que divise 4, moins u au point. Ce que j'ai exposé, c'était une discrétisation d'un problème de Dirichlet, d'un problème de théorie du potentiel.

[NDLR : nous avions commencé cet article en promettant quelques remarques complémentaires de Claude Dellacherie ; chose promise, chose dûe :]

« Je me suis aperçu depuis [la conférence] que le problème du Chevalier de Méré était bien plus ancien : on le trouve déjà cité dans un livre de Pacioli, avec une mauvaise solution.
(…)
Ensuite, j'ai trouvé que le problème avait plus d'une parenté avec une récréation, du livre de Fourrey, qui m'avait beaucoup frappé quand j'avais l'âge de nos jeunes conférenciers, et que je résume de mémoire comme suit :

Deux hommes, l'un ayant trois pains et l'autre cinq, rencontrent un affamé riche de huit pièces d'or. Ils partagent les huit pains équitablement entre eux, et les deux premiers reçoivent les huit pièces en dédommagement. Le problème est de partager équitablement les huit pièces entre les deux fournisseurs de pain.

Le premier est pour la répartition trois/cinq mais le second pour la répartition un/sept, arguant que chacun a mangé huit tiers de pain tandis que le premier a fourni neuf tiers de pain et le second quinze tiers de pain, si bien que le second a donné sept tiers à l'affamé et le premier un seul.

Une petite histoire de ce genre aurait eu le mérite de convaincre plus facilement certains que des partages “évidents” peuvent être à côté de la plaque. (…) »

[NDLR. Quelques références :

• On peut trouver des lettres de Pascal et Fermat dans l'excellent livre :
Mathématiques au fil des âges, textes choisis et commentés par J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel et M. Guillemot, IREM, groupe épistémologie et histoire, publié chez Gauthier-Villars, © 1987.

• D'autre part, on trouve le portait du moine franciscain *Luca Pacioli* (humaniste et mathématicien, 1445-1517) en couverture du même … *Mathématiques au fil des âges*. Il est aussi question du frère franciscain *Luca Pacioli* (1450-1510, il occupa une chaire de mathématiques à Milan) dans *Routes et dédales*, de Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, à la Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

• Le livre de récréations mathématiques auquel Claude Dellacherie fait allusion a été réimprimé récemment ; il s'agit de :
Emile Fourrey, *Récréations arithmétiques*, Vuibert et ACL-Editions, © Librairie Vuibert 1994,
et le problème de la *division* des petits pains se trouve p. 160. Comme le livre commence par la désormais classique sentence « DANGER : le photocopillage tue le livre. », nous ne recopillons pas ce court texte, où trois partages sont proposés :
— trois/cinq,
— quatre/quatre et remboursement du prix d'un pain,
et
— un/sept.]

[NDLC : page suivante, quelques extraits savoureux … la conférence de Claude Dellacherie, comme si vous y étiez.]

quelques extraits savoureux de la conférence de Claude Dellacherie, qui s'amuse à jouer tableau et craie contre rétroprojecteur et micro …

… où vais-je faire mon petit dessin ? Je vais le faire là … vous voyez … je me repose … je me repose mais quand même pendant ce temps-là … parce que j'aurais bien passé aussi une demi-heure à … j'ai beaucoup aimé hein … que les expositions des gens étaient habiles … malhabiles … qu'ils sont partis un peu le cœur gros ou qu'au contraire ils sont sortis triomphants, tout était bon, tout était bien, c'est une question ensuite de travail si on veut devenir un professionnel de la scène comme moi … donc une chose en particulier … vous voyez que je me repose beaucoup, c'est qu'on a besoin de silences mais justement quand on essuie un tableau ce n'est pas tout à fait le silence … parce que quand vous faites avec vos papiers, comme j'en ai vu plus d'un, le silence à chercher ses trucs, alors la salle commence à développer un brouhaha et vous vous dispersez.

Il faut absolument dominer, dompter, là, le public, là … bien … alors … et même avec un micro … Alors … j'allais faire un dessin …

… des grands rectangles pour que ce soit lisible … j'espère aussi que les gens ce matin ont pu remarquer malheureusement qu'ils avaient un superbe tableau plein de chiffres dont ils étaient très fiers mais que les gens même ici n'arrivaient pas à lire … ça ne fait rien, hein l'effet était là, il est bien présenté leur truc, on n'est pas toujours obligé de savoir lire, hein …

… oui si j'avais changé de … bon tant pis … ce sont des carrés parfaits n'est-ce pas ? … si c'était fait ça sur un … comment ça s'appelle ? … un transparent, on dirait « il a mal préparé son truc » mais là personne ne m'en veut d'avoir fait un … pareil, hein, un carré pareil, bon alors

Quelle est la solution de … ah il faut que j'efface, le tableau est petit c'est la même chose que je veux, je vais essayer d'écrire en jaune dessus mais le jaune … vous avez remarqué que j'ai quand même une chose moderne qui est un porte-craie, mais seulement les craies qu'ils m'ont données ne rentrent pas dans le porte-craie (rires) bon … bien alors je vais m'en mettre sur les doigts bon alors …

Vous avez le droit de poser des questions vous n'êtes pas obligés parce que, vous savez, quand il n'y a pas de questions, c'est que tout a été clair.